

---

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

SOLUZIONI POSITIVE IN  $\mathbb{R}^n$  PER  
EQUAZIONI DI TIPO CURVATURA MEDIA ASSEGNATA

2 MAGGIO 1985

Scopo di questo seminario è la presentazione di alcuni Teoremi di esistenza e di unicità per il problema

$$(M) \quad \begin{cases} M(u) + f(u) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow +\infty \end{cases}, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n),$$

dove  $M$  è l'operatore delle superficie minime

$$M(u) = \operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right), \quad Du = \operatorname{grad} u,$$

e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione localmente lipschitziana. I risultati che esporremo sono stati ottenuti insieme con B. Franchi e J. Serrin; essi estendono precedenti teoremi di Berestycki-Lions-Peletier e di Peletier-Serrin relativi al problema

$$(\Delta) \quad \begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \\ u(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

(Cfr. [BLP] e [PS]; Cfr. anche [L]).

I metodi variazionali solitamente usati per provare l'esistenza di soluzioni (deboli) del problema  $(\Delta)$ , non sembrano applicabili al caso  $(M)$ . D'altra parte, poiché la non linearità di  $M$  è determinata dal termine  $(1+|Du|^2)^{-1/2}$ , dipendente solo da  $|Du|$ , una funzione a simme-

tria radiale  $u(x) = u(|x|)$  risolve (M) se, e solo se, verifica

$$(*) \quad \begin{cases} E(u')u'' + \frac{n-1}{r} A(u')u' + f(u) = 0 \\ u'(0) = 0, u(r) > 0 \quad \forall r \geq 0, \quad u \in C^2([0, +\infty[) \\ u(r) \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Abbiamo posto, per semplicità, di scrittura,

$$A(t) = (1+t^2)^{-1/2} \quad \text{e} \quad E(t) \equiv (tA(t))' = (1+t^2)^{-3/2}$$

Il nostro metodo per provare l'esistenza di una soluzione di (\*) si ispira a quello utilizzato in [BLP] e consiste nel provare che esiste  $\xi > 0$  tale che il problema di Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} E(u')u'' + \frac{n-1}{r} A(u')u' + f(u) = 0 \\ u'(0) = 0, \quad u(0) = \xi \end{cases}$$

ha una soluzione  $u \equiv u(\xi, \cdot)$  di dominio l'intero intervallo  $[0, +\infty[$ , strettamente positiva e infinitesima all'infinito. Questo sarà provato nel § 3.

Nel § 4, con un procedimento analogo a quello impiegato in [PS], verrà provata l'unicità (a meno di una traslazione) delle soluzioni radiali di (M). Infine, nel § 5, estendendo precedenti risultati di [GNN] relativi al caso ( $\Delta$ ), proviamo che ogni soluzione di (M) è radialmente simmetrica rispetto ad un punto di  $R^n$ . Tutto ciò, purché  $f$  verifichi opportune ipotesi che verranno precisate di volta in volta.

Segnaliamo infine che i risultati da noi ottenuti valgono anche per equazioni più generali del tipo seguente

$$\operatorname{div}(A(|Du|)Du) + f(u) = 0$$

se A verifica

$$(A.1) \quad A > 0 \text{ su } [0, +\infty[ \quad , \quad A(0) = 1 \quad ,$$

$$(A.2) \quad E(t) = (tA(t))' > 0 \text{ su } [0, +\infty[ \quad ,$$

$$(A.3) \quad t \rightarrow 1/(A(\sqrt{t}))^2 \text{ è crescente e concava su } [0, +\infty[.$$

In particolare (A.1), (A.2) e (A.3) valgono per l'operatore delle superficie minime "generalizzato"

$$\operatorname{div}((1+|Du|^2)^{-m/2} Du) \quad , \quad 0 \leq m \leq 1.$$

2. In questo numero studiamo alcune proprietà delle soluzioni dell'equazione

$$(2.1) \quad E(u')u'' + \frac{n-1}{r} A(u')u' + f(u) = 0$$

Utilizzando il Teorema del punto fisso di Schauder, si può provare che il problema di Cauchy (P) ha una soluzione non prolungabile  $u$  (unica per la lipschitzianità di  $f$ ) di classe  $C^{(2)}$  su  $[0, T_\xi[$ ,  $T_\xi \leq +\infty$ .

Posto

$$(2.2) \quad F(t) = \int_0^t f(s) ds \quad ,$$

se  $u \in C^{(2)}([r_1, r_2])$ ,  $0 < r_1 \leq r_2$ , è soluzione di (2.1), allora, moltiplicando (2.1) per  $u'$  e integrando su  $[r_1, r_2]$ , si ottiene

$$(2.3) \quad \frac{\int |u'(r_2)|}{|u'(r_1)|} \rho E(\rho) d\rho + (n-1) \int_{r_1}^{r_2} A(u'(\rho)) u'^2(\rho) \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= F(u(r_1)) - F(u(r_2))$$

Da questa identità, con ragionamenti simili a quelli del Lemma 3 di [PS], si trae che ogni soluzione  $u$  di (\*) è strettamente decrescente con derivata infinitesima all'infinito. Inoltre

$$(2.4) \quad \int_0^{+\infty} A(u'(\rho)) u'^2(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = F(u(0)).$$

La seguente condizione è quindi *necessaria* affinché (\*) abbia soluzione

$$(H.1) \quad \exists \delta > 0 : F(\delta) > 0.$$

Posto poi

$$(2.5) \quad \beta = \inf\{u > 0 ; F(u) > 0\},$$

se  $u$  è soluzione di (\*) e  $n > 1$ , allora  $u(0) > \beta$ . Un'altra condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione di (\*) è la seguente:

$$(2.5) \quad \max_{[0, \beta]} |F| < 1 \equiv \int_0^{+\infty} \rho E(\rho) d\rho .$$

Infatti, se  $u$  è soluzione di (\*), per la (2.3) si ha

$$F(u(0)) - F(u(r)) < (n-1) \int_0^{+\infty} A(u') u'^2 \frac{d\rho}{\rho} + \int_0^{+\infty} \rho E(\rho) d\rho$$

e quindi, per la (2.4),

$$-F(u(r)) < \int_0^{+\infty} \rho E(\rho) d\rho \quad \forall r \geq 0.$$

Introduciamo ora alcune ipotesi su  $f$ .

(H.2)  $\exists \alpha, \gamma > 0, \alpha < \beta < \gamma: f(\alpha) = f(\gamma) = 0, f(t) \neq 0$  se  $0 < t < \gamma, t \neq \alpha$ .

(H3.)  $F(\gamma) - F(\alpha) \equiv \max_{[0, \gamma]} F - \min_{[0, \gamma]} F > 1$

(Cfr. (2.5)).

Proposizione 2.2. Siano soddisfatte le ipotesi (H.1)-(H.3) e sia  $u: [0, T_\xi[ \rightarrow \mathbb{R}$  la soluzione non prolungabile del problema (P) con  $0 < \xi < \gamma$ . Allora

i)  $\exists R \in ]0, T_\xi[ : 0 = u(R) < u(r) \quad \forall r \in [0, R[$ ,

oppure

ii)  $T_\xi = +\infty$  e  $0 < u(r) < \gamma \quad \forall r \geq 0$ .

Se  $0 < \xi \leq \beta$  vale ii)

Dimostrazione. In un intorno di 0 è  $0 < u < \gamma$ . Se non vale i) risulta  $u(r) > 0 \quad \forall r \in [0, T_\xi[$ . Per la (2.3), con  $r_1 = 0$  e  $r_2 = r$ , si ha  $F(\xi) - F(u(r)) > 0 \quad \forall r \in [0, T_\xi[$  e, quindi,  $F(u(r)) < F(\gamma) \quad \forall r \in [0, T_\xi[$ .

Pertanto  $u(r) \neq \gamma \quad \forall r \in [0, T_\xi[$ . Poiché  $u(0) < \gamma$  ne viene che  $u(r) < \gamma$   
 $\forall r \in [0, T_\xi[$ .

D'altra parte, per la (2.3), per ogni  $r > 0$  si ha

$$(2.6) \quad \int_0^r \frac{|u'(r)|}{\rho E(\rho)} d\rho + (n-1) \int_0^r A(u') u'^2 \frac{d\rho}{\rho} = F(\xi) - F(u(r))$$

e, quindi,

$$\int_0^{\sup |u'|} \rho E(\rho) d\rho \leq \sup_{[0, \gamma]} F - \inf_{[0, \gamma]} f < \int_0^{+\infty} \rho E(\rho) d\rho$$

Ciò prova che  $\sup_{[0, T_\xi[} |u'| < +\infty$ . Di conseguenza  $T_\xi = +\infty$ .

Infine, se  $\xi \leq \beta$  risulta  $u(r) > 0 \quad \forall r \geq 0$ . Infatti, se fosse  
 $u(r) = 0$  per un  $r > 0$ , si avrebbe

$$\int_0^r \frac{|u'(r)|}{\rho E(\rho)} d\rho \leq F(\xi) - F(u(r)) = F(\xi) \leq 0$$

e, quindi,  $u'(r) = 0$ . Per l'unicità della soluzione del problema (P)  
dovrebbe essere allora  $u \equiv 0$ .

**Proposizione 2.3.** Siano soddisfatte le ipotesi (H.1)-(H.3) e,  
di più la seguente

$$(H.4) \quad \exists f'(\alpha) > 0.$$

Siano  $0 < \xi < \gamma$  e  $u = u(\xi, \cdot): [0, T_\xi[ \rightarrow \mathbb{R}$  la soluzione non prolungabi-  
le di (P). Allora, se  $T_\xi = +\infty$  e  $u(r) > 0 \quad \forall r \geq 0$ , risulta

i)  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = 0$  , oppure ii) se  $n = 1$   $u$  è periodica,

se  $n > 1$   $u$  è oscillante, esiste cioè una successione di punti critici di  $u$ ,  $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k \uparrow +\infty$ , tale che  $u(r) < u(r_k) \forall r > r_k$  se  $r_k$  è un punto di massimo relativo,  $u(r) < u(r_k) \forall r < r_k$  se  $r_k$  è un punto di minimo<sup>(1)</sup>.

Dimostrazione. Se  $\text{sgn } u'$  è costante in un intorno di  $+\infty$ ,  $u$  ha limite, necessariamente finito, per  $r \rightarrow +\infty$ . Dalla (2.6) si ricava allora che anche  $u'$  ha limite, necessariamente zero, per  $r \rightarrow +\infty$ . Per l'equazione (2.1)  $u'$  ha limite, necessariamente uguale a zero, per  $r \rightarrow +\infty$ . Ancora da (2.1) si ricava infine  $f(\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r)) = 0$ . Allora  $l \equiv \lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = \alpha$  oppure  $l = 0$ . Con ragionamenti analoghi a quelli di

[BLP], utilizzando l'ipotesi (H.4), si prova che non può essere  $l = \alpha$ . In questo caso allora vale i). Se  $\text{sgn } u'$  non è costante in un intorno di  $+\infty$ , esiste una successione di punti critici di  $u$ ,  $r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k \uparrow +\infty$ . Se, per fissare le idee  $r_k$  è un punto di massimo, dalla (2.3), nel caso di  $n > 1$ , si ricava  $u(r) < u(r_k)$  per ogni  $r > r_k$ . Supponiamo ora  $n = 1$ . Poiché  $r_{k+1}$  è un punto di minimo per  $u$ , deve essere  $f(u(r_{k+1})) < 0$  (Cfr. l'equazione 2.1) e, quindi,  $u(r_{k+1}) < \alpha$ . Esiste allora  $\xi^* \in ]\alpha, \beta[$  tale che  $F(\xi) = F(\xi^*)$ . Allora, poiché  $u$  è soluzione del problema

$$\begin{cases} E(v')v'' + f(v) = 0 \\ v'(r_{k+1}) = 0, \quad v(r_{k+1}) = u(r_{k+1}) \equiv \xi \end{cases}$$

(1) A causa dell'unicità delle soluzioni di (P), ogni punto critico di  $u$  è, necessariamente, di massimo o di minimo stretto.



$u$  è periodica di periodo

$$(2.7) \quad p = p(\xi) = 2 \int_{\xi}^{\xi^*} \frac{1}{\lambda(F(\xi) - F(t))} dt$$

$$\text{dove } \lambda = \Lambda^{-1} \text{ e } \Lambda(t) = \int_0^t \rho E(\rho) d\rho.$$

Osservazione 2.4. Per il periodo  $p = p(\xi)$  vale la relazione

$$\lim_{\xi \rightarrow \alpha} p(\xi) = 2\pi / \sqrt{f'(\alpha)}.$$

Inoltre, se, per esempio,  $f(t) = -mt^\epsilon$  per  $0 < t < \delta$  e  $f(t) = m|t-\beta|^\epsilon$  per  $|t-\beta| < \delta$ , con  $0 < \epsilon < 1$ ,  $m$  e  $\delta > 0$ , allora

$$(2.8) \quad \sup_{0 < \xi < \beta} p(\xi) = p^* < +\infty.$$

3. In questo paragrafo proviamo il teorema seguente

Teorema 3.1. Se  $f$  verifica (H.1)-(H.4) il problema (\*) ha soluzione.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che  $f$  verifichi anche le ipotesi dell'Osservazione 2.4. Poniamo

$$I_0 = \{\xi \in ]0, \gamma[ / \exists R > 0 : u(\xi, r) < u(\xi, R) = 0 \quad \forall r \in [0, R[ \},$$

$$I_+ = \{\xi \in ]0, \gamma[ / \inf u(\xi, \cdot) > 0\}.$$

(qui  $u(\xi, \cdot)$  indica la soluzione non prolungabile di (P)). Risulta

$I_0 \cap I_+ = \emptyset$ . Inoltre  $I_+ \neq \emptyset$  per le Proposizioni 2.3 e 2.2,  $I_0$  è aperto per la dipendenza continua dai dati. Ancora dalla Proposizione 2.3 e dal Teorema di dipendenza continua dai dati, segue subito che anche  $I_+$  è aperto. Proviamo che  $I_0 \neq \emptyset$ . Per assurdo supponiamo  $I_0 = \emptyset$ . Allora  $u = u(\xi, \cdot)$  è oscillante  $\forall \xi \in ]0, \gamma[$ . D'altra parte, poiché  $v \equiv \gamma$  è soluzione di (2.1), per ogni fissato  $\bar{R} > 0$  si può determinare  $\delta > 0$  tale che  $u'(\xi, r) < 0 \forall r \in [0, \bar{R}]$  e  $\forall \xi \in ]\gamma - \delta, \gamma[$ . Poiché  $u$  è oscillante, esiste  $R > \bar{R}$ :  $u'(R) = 0$ . Possiamo supporre che  $R$  sia il primo zero di  $u'$ . Quindi  $R$  è un punto di minimo forte per  $u$  ed allora  $f(u(r)) < 0$  e  $u(R) = \eta \in ]0, \alpha[$ .

Sia ora  $v$  la soluzione (periodica) del problema

$$(3.1) \quad \begin{cases} E(v')v'' + f(v) = 0 \\ v(0) = \eta, v'(0) = 0 \end{cases}$$

Se  $p = p(\eta)$  è il periodo di  $v$ , per l'osservazione 2.4 risulta  $\sup p \leq p^* < +\infty$ . Non è restrittivo supporre  $2p^* < \bar{R}$ .

Posto  $w(r) = u(\xi, r + R)$ ,  $r \geq -2p^*$ , risulta

$$(3.1') \quad \begin{cases} E(w')w'' + \frac{\eta-1}{\rho+R} A(w')w' + f(w) = 0 \\ w(0) = \eta, w'(0) = 0 \end{cases}$$

Per i teoremi di dipendenza continua dall'equazione, poiché  $v$  è periodica di periodo  $p \leq p^*$ , se  $\bar{R}$  è sufficientemente grande (dipendente solo da  $p^*$ ), allora  $w'$  (al pari di  $v'$ ) deve avere uno zero in un punto  $-\rho \in ]-p^*, 0[$ . Di conseguenza  $u'(R-\rho) = 0$ . Ciò contraddice la scelta di  $R$  e prova che  $I_0 \neq \emptyset$ .

Allora  $\exists \xi_0 \in ]0, \gamma[ : \xi_0 \notin I_0 \cup I_+$ . La funzione  $u = u(\xi_0, \cdot)$  è

soluzione di (\*) (Cfr. Proposizione 2.3).

Il Teorema è provato se  $f$  verifica anche le ipotesi dell'osservazione 2.4. In generale, una funzione  $f$  verificante (H.1)-(H.4), può essere approssimata uniformemente mediante una successione di funzioni  $(f_j)$  verificanti le ipotesi suddette. Sia  $u_j = u(\xi_j, \cdot)$  una soluzione di (\*) relativa ad  $f_j$ . Possiamo supporre  $\xi_j \rightarrow \xi^* \in [\beta, \gamma]$  e, di conseguenza,  $u_j \rightarrow u \in C^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$ ,  $u$  soluzione di (2.1). Poiché  $u_j$  è monotona decrescente anche  $u$  lo è. In particolare  $u$  non è oscillante.

Si ha poi  $u \geq 0$  e  $u \not\equiv 0$ . Allora  $u > 0$  (se fosse  $u(r) = 0$  per un  $r > 0$  sarebbe anche  $u'(r) = 0$  e, quindi,  $u \equiv 0$ ). Allora  $u$  è soluzione di (\*) se è  $u \neq \gamma$  cioè se  $\xi_j \not\rightarrow \gamma$ . Per assurdo supponiamo  $\xi_j \rightarrow \gamma$ .

Allora, per ogni  $R > 0$ ,

$$\begin{aligned} F(u_j(0)) &= F(\xi_j) = \int_0^{+\infty} A(u_j') u_j'^2 \frac{d\rho}{\rho} \leq \\ &\leq \int_0^R |u_j'| \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{R} \int_R^{+\infty} (-u'(\rho)) d\rho \leq \\ &\leq \sup_{[0, R]} |u_j''| R + \frac{u_j(R)}{R} \leq \sup_{[0, R]} |u_j'| R + \gamma/R \rightarrow \gamma/R \text{ per } j \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ciò, data l'arbitrarietà di  $R$ , è assurdo in quanto  $F(\xi_j) \rightarrow F(\gamma) > 0$ .

4. In questo numero mostreremo il seguente teorema di unicità

**Teorema 4.1.** Se  $f$  verifica (H.1), se  $n \geq \frac{3}{2}$  e se

$$(H'.1) \quad \inf\{u > 0 / f(u) > 0\} = \alpha > 0,$$

$$(H''.1) \quad f \searrow \text{ su } \{u > \beta / f(u) > 0\},$$

allora (\*) ha al più una soluzione.

Dimostrazione. Siano  $u$  e  $v$  due soluzioni di (\*). Indicheremo con  $r$  ed  $s$  rispettivamente le funzioni inverse di  $u$  e di  $v$ . Seguendo [PS] mostreremo le affermazioni seguenti:

A) Se  $u > \sigma$  in  $]R, +\infty[$  la funzione  $r-s$  è positiva e strettamente decrescente su  $]v(R), 0[$ .

B) Se, per un  $R > 0$  riesce  $u(R) = v(R) = U$ , allora  $U > \beta$ .

C) Se, per un  $R > 0$  riesce  $u(R) = v(R) = U$  allora  $U \leq \beta$ .

Osserviamo che da A), B) e C) segue subito l'unicità. Infatti se  $u \neq v$  i grafici di  $u$  e di  $v$  non possono intersecarsi (a causa di B) e di C)). Sia, per fissare le idee,  $u > v$  in  $[0, +\infty[$ . Allora, per A),  $r-s$  è positiva e strettamente decrescente su  $]v(0), 0[$ . Ciò è assurdo perché  $\lim_{u \rightarrow v(0)^+} (r(u) - s(u))' = +\infty$ .

La prova di A) e di C) si fonda sulle proprietà delle soluzioni di (\*) mostrate nel § 2; essa non si discosta troppo dalle corrispondenti dimostrazioni relative al caso del laplaciano contenute in [PS]. La dimostrazione di B) richiede invece un procedimento nuovo.

Denotiamo con  $l(t, p)$  la funzione positiva definita implicitamente dall'equazione

$$\int_1^p \rho E(\rho) d\rho + F(t) = 0$$

sull'aperto

$$\Omega = \{(t,p)/0 < t < \beta, p > 0, \int_0^p \rho E(\rho) d\rho + F(t) > 0\}.$$

Poniamo inoltre

$$K(t,p) = 2(n-1) A(t) \{p^2 A(p) - t^2 A(t)\}$$

Ragioniamo ora per assurdo e supponiamo  $u(R) = v(R) = U \leq \beta$ . Vale allora la seguente identità:

$$(4.1) \quad R^{2(n-1)} L^2 A^2(L) - \lambda^2 = \int_0^U r^{2n-3} K(n,p) \frac{du}{p}$$

dove  $r = r(u)$  e  $p = |u'(r(u))|$ . Inoltre

$$L = \lim_{r \rightarrow R} l(u(r), |u'(r)|) \equiv \lim_{r \rightarrow R} l(r) \in ]0, |u'(R)|],$$

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{(n-1)/2} l(r) A(l(r)) \in [0, +\infty[.$$

La (4.1) si ottiene integrando su  $]R, +\infty[$  la

$$\frac{d}{dr} (r^{n-1} l(r) A(l(r)))^2$$

e, successivamente, eseguendo il cambiamento di variabile  $u(r) = u$  nell'integrale.

Ovviamente, una formula analoga alla (4.1) vale anche per  $v$ .

Se indichiamo con  $M$ ,  $\mu$  e  $q$  le quantità relative a  $v$  e corrispondenti a  $L$ ,  $\lambda$  e  $p$  rispettivamente, si ha allora:

$$\begin{aligned} R^{2(n-1)} \{L^2 A^2(L) - M^2 A^2(M)\} - (\lambda^2 - \mu^2) &= \\ = \int_0^U (r^{2n-3} \frac{K(ur, p)}{p} - s^{2n-3} \frac{K(us, q)}{q}) du. \end{aligned}$$

Ora, come nel caso (A), si può provare che  $u$  e  $v$  si intersecano al più in un numero finito di punti. Non è pertanto restrittivo supporre, ad esempio,  $u(r) > v(r) \quad \forall r > R$ . Ne viene allora  $v'(R) > u'(R)$  (per il teorema di unicità) e, di conseguenza,  $L < M$ . Inoltre  $\lambda \geq \mu$ . Allora, poiché  $t \rightarrow t A(t)$  è strettamente crescente, il primo membro di (4.2) è  $< 0$ . D'altra parte

$$\begin{aligned} r^{2n-3} \frac{K(u, p)}{p} - s^{2n-3} \frac{K(u, q)}{q} &= \{r^{2n-3} - s^{2n-3}\} \frac{K(u, p)}{p} + \\ + s^{2n-3} \left\{ \frac{K(u, p)}{p} - \frac{K(u, q)}{q} \right\} \end{aligned}$$

Ora, una verifica diretta prova che è  $K \geq 0$  e  $\frac{\partial}{\partial \tau} (K(t, \tau)/\tau) \leq 0$ . D'altra parte per A),

$$r^{2n-3} - s^{2n-3} \geq 0 \quad (n \geq \frac{3}{2}) \quad \text{e} \quad p - q = \left| \frac{1}{r} \right| - \left| \frac{1}{s} \right| \leq 0.$$

Ne viene allora che il secondo membro di (4.2) è  $\geq 0$ , mentre, per quanto detto sopra, il primo membro è  $< 0$ . Questa contraddizione prova B).

5. In questo paragrafo proviamo che ogni soluzione di (M) è radialmente simmetrica rispetto ad un punto di  $R^n$ , purché  $f$  verifichi l'ipotesi

(S)  $f(t) = t + g(t)$  con  $g(0) = g'(0) = 0$ ,  $g \in C^{1+\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

La dimostrazione può essere ricondotta a quella del Teorema 2 di [GNN] procedendo nel modo seguente.

A) Per ogni  $\varepsilon \in ]0,1[$  riesce  $u(x) = O(e^{-\varepsilon|x|})$  per  $x \rightarrow \infty$ .

Questa affermazione si può provare applicando i teoremi di confronto relativi alle equazioni ellittiche quasi-lineari alle funzioni  $u$  e

$$V_\lambda(x) = \lambda e^{-\varepsilon|x|}, \quad \lambda > 0 \text{ opportuno.}$$

B) Risulta  $u(x), Du(x) = O(|x|^{(1-n)/2} e^{-|x|})$  per  $x \rightarrow \infty$ .

Infatti, grazie alle stime a priori del gradiente di [LU], riesce  $\sup_{\mathbb{R}^n} |Du| = C^* < +\infty$ .

Di conseguenza (Cfr. [GT], Teorema 12.1)

$$\sup_{x \neq y} \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|^\sigma} \equiv [Du]_{\sigma,S(x,1)} \leq C_1$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Qui  $C_1$  e  $\sigma$  dipendono solo da  $\sup u$  e da  $C^*$ . Allora  $u$  verifica l'equazione ellittica lineare

$$(5.1) \quad Lu = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} u - (1-b)u = 0$$

con

$$a_{ij} = (1 + |Du|^2)^{-1/2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1 + |Du|^2} \right)$$

e

$$b(x) = \frac{g(u(x))}{u(x)} = \int_0^1 g'(su(x)) ds ;$$

per quanto già detto e per l'ipotesi (S) i coefficienti  $a_{ij}$  e  $b$  hanno norme hölderiane, su una qualunque sfera  $S(x,1)$ , dipendenti solo da  $\sup u$  e da  $C^*$ . Per le classiche stime a priori di Schauder si ha pertanto

$$\begin{aligned} \sup_{S(x, \frac{1}{2})} |Du| + \sup_{S(x, \frac{1}{2})} |D^2 u| &\leq C_3 \sup_{S(x, 1)} u = \\ &= O(e^{-\varepsilon|x|}) \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1[ \end{aligned}$$

Allora, per la (5.1),  $(-\Delta)u + u = h$  con  $h(x) = O(e^{-(\alpha+1)|x|})$ . Scegliendo  $\varepsilon < 1$  tale che  $(\alpha + 1)\varepsilon > 1$ , l'affermazione B) segue dalla formula di rappresentazione

$$(5.2) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y)h(y)dy$$

dove  $G$  è la funzione di Green di  $(-\Delta + 1)$  in  $\mathbb{R}^n$ :

$$(5.3) \quad G(x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left( (1 + |\xi|^2)^{-1} \right).$$

C) Se indichiamo con  $x_Y^\lambda$  il simmetrico del punto  $x$  rispetto all'iperpiano

$$T_Y^\lambda = \{x \cdot \gamma = \lambda\} \quad , \quad \gamma \in \mathbb{R}^n, |\gamma| = 1,$$



e se poniamo

$$u_Y^\lambda(x) = u(x_Y^\lambda) ,$$

risulta (Cfr. (5.1))

$$(Lu_Y^\lambda)(x) = (Lu)(x_Y^\lambda).$$

La verifica è immediata.

Questa proprietà dell'operatore  $L$  e la formula di rappresentazione (5.3), permettono di provare la simmetria radiale di  $u$  rispetto ad un opportuno punto  $x_0$ , procedendo esattamente come sulla prova del Teorema 2 di [GNN].

BIBLIOGRAFIA

- [BLP] M. BERESTYCKI, P.L. LIONS, L.A. PELETIER - An O.D.E. approach to the existence of positive solutions for semilinear problem in  $R^n$ , Indiana Univ. Math. J. Vol. 30 n. 1 (1981) 141-157.
- [GNN] B. GIDAS, W.M. NI, L. NIRENBERG, Symmetry of positive solutions of non linear elliptic equations in  $R^n$ , Mathematical Analysis and Applications, Advances in Math. Part A-L. Nachin Editor, Academic Press (1981) 369-402.
- [L] E. LANCONELLI, Esistenza, unicità e simmetria radiale delle soluzioni positive di equazioni di Poisson semilineari, Seminario di Analisi Matematica, Univ. di Bologna (1983/84).
- [LU] O.A. LADYZENSKAJA, N.N. URAL'TSEVA , Local estimates for gradient of solutions of non uniformly elliptic and parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 23, 1970, 677-703.
- [PS] L.A. PELETIER, J. SERRIN, Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in  $R^n$ , Arch. Rat. Mech. Analysis 81 (1983) 181-197.
- [GT] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Springer-Verlag (1977).